

## GUÍA DE AUTOAPRENDIZAJE N°3 (7): ECUACIÓN CUADRÁTICA

<b>Nombre Alumno(a):</b>	
<b>Asignatura: MATEMÁTICA</b>	<b>Profesor: ELÍAS FIGUEROA QUIROZ</b> <b>Correo: <i>matematicamedia.profeelias@gmail.com</i></b>
<b>Curso: 2° Medio ____</b>	<b>Fecha:</b>
<b>Aprendizajes Esperados: OA</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconocer ecuaciones cuadráticas o de segundo grado.</li> <li>• Identificar coeficientes <math>a</math>, <math>b</math> y <math>c</math> de las ecuaciones cuadráticas.</li> <li>• Reconocer ecuaciones cuadráticas de forma incompleta o completa.</li> <li>• Aplicar métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas.</li> <li>• Calcular las soluciones (o raíces) de las ecuaciones cuadráticas.</li> </ul>	

### ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO:

Es aquella ecuación en la que el mayor exponente de la incógnita es dos, y por lo tanto, tiene dos soluciones o raíces. Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0$$

Existen ecuaciones cuadráticas completas e incompletas:

✓	$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 1; \quad b \neq 0; \quad c \neq 0$	→	<b>Ec. Completa General.</b>
✓	$x^2 + bx + c = 0; \quad a = 1; \quad b \neq 0; \quad c \neq 0$	→	<b>Ec. Completa Particular.</b>
✓	$ax^2 + c = 0; \quad b = 0; \quad c \neq 0$	→	<b>Ec. Incompleta Pura.</b>
✓	$ax^2 + bx = 0; \quad b \neq 0; \quad c = 0$	→	<b>Ec. Incompleta Binomial.</b>
✓	$ax^2 = 0; \quad b = c = 0$	→	<b>Ec. Incompleta.</b>

### Ejercicio N°1:

Reconocer una ecuación cuadrática e identificar sus coeficientes. Clasificar las ecuaciones cuadráticas.

1. ¿Cuáles de las ecuaciones dadas son de 2° grado?
  - I)  $2x^2 - \frac{1}{2}x + 5 = 0$
  - II)  $(4-x)^2 = x^2$
  - III)  $25x^2 - \sqrt{6}x = 7$ 
    - a) Sólo I, II
    - b) Sólo I, III
    - c) Sólo II, III
    - d) Sólo I
    - e) I, II y III
  
2. El valor del coeficiente  $b$  en la ecuación  $3x^2 + 10x - 5 = 0$  es:
  - a) 3
  - b) 0
  - c) 10
  - d) 5
  - e) -5
  
3. ¿Cuáles de las ecuaciones dadas son **incompletas**?
  - I)  $x^2 + 7x = 0$
  - II)  $-5x^2 - \frac{3}{4} = 0$
  - III)  $\frac{2}{3}x(x-4) - \frac{1}{2}x(x-3) + \frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ 
    - a) Sólo I
    - b) Sólo II
    - c) I y II
    - d) I y III
    - e) I, II y III
  
4. Si la ecuación  $(y-1)^2 - (y-2)^2 = y^2$  la escribimos de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ ; ¿Cuál es el valor del coeficiente  $c$ ?
  - a) 3
  - b) 2
  - c) -5
  - d) -2
  - e) 1
  
5. En la ecuación  $x(x+1) - (4-x)(x+1) = 6(4-x)$  el coeficiente  $a$  vale:
  - a) 0
  - b) -1
  - c) 1
  - d) 2
  - e) -2
  
6. La ecuación  $\frac{4x+8}{3} - \frac{4}{x} = 0$ ; al expresarla como  $ax^2 + bx + c = 0$ ; ¿Cuál es el valor de los coeficientes  $b$  y  $c$ , en ese orden?
  - a) -8 y 12
  - b) 4 y 12
  - c) -4 y 8
  - d) 8 y -12
  - e) 12 y -8
  
7. En la ecuación  $3x^{-2} - 5x^{-1} + 6 = 0$ ; expresándola como  $ax^2 + bx + c = 0$ ; el valor de  $-(2b+3c)$  es igual a:
  - a) 1
  - b) 2
  - c) 8
  - d) -1
  - e) -8
  
8. La ecuación  $\frac{x(x-8)}{4} + 2 = 0$  expresándola como  $4(ax^2 + bx + c) = 0$ ; entonces el producto de los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  es:
  - a) -1
  - b) -4
  - c) 4
  - d) 0
  - e) 1

9. En la ecuación  $x(x+3)+2=3x$  al expresarla como  $ax^2+bx+c=0$ ; el valor del producto  $a \cdot b$  es:

- a) 1
- b) 0
- c) -1
- d) 2
- e) -2

10. En la ecuación  $2x^2-3x-1=0$ , el valor de  $2c \cdot (a \cdot b)$  es:

- a) 0
- b) 6
- c) 8
- d) 10
- e) 12

11. La ecuación  $x(x+3)+2=-11x$  es:

- a) Completa general
- b) Completa particular
- c) Incompleta pura
- d) Incompleta binomial
- e) Incompleta

Claves

1 b	5 d	9 b
2 c	6 d	10 e
3 e	7 a	11 b
4 a	8 a	

## **RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS**

El objetivo de resolver una ecuación cuadrática es determinar los valores numéricos para la variable  $x$  que hacen que la expresión  $ax^2+bx+c$  valga *cero*. Equivale a determinar los valores numéricos para la variable  $x$  que en la función cuadrática  $f(x)=ax^2+bx+c$  tienen imagen *cero*.

**I. Ecuación incompleta** cuando uno de los coeficientes  $b$  o  $c$  es *cero*:

a) Incompleta pura:  $ax^2+c=0$

Se despeja la incógnita y se obtiene su raíz cuadrada

$$ax^2+c=0$$

$$ax^2=-c$$

$$x^2=\frac{-c}{a}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Ejemplo:  $2x^2-18=0$

$$2x^2=18$$

$$x^2=\frac{18}{2}$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

Por lo tanto su conjunto solución es  $S=\{3,-3\}$

b) Incompleta binomial:  $ax^2+bx=0$

Se factoriza por la incógnita para obtener los factores que igualados a *cero* darán la solución:

$$ax^2+bx=0$$

$$x(ax+b)=0$$

$$x=0 \vee ax+b=0$$

$$\text{Luego } x_1=0 \vee x_2=\frac{-b}{a}$$

Ejemplo:  $3x^2-2x=0$

$$x(3x-2)=0$$

$$x=0 \vee 3x-2=0$$

$$\text{Entonces } x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{3}$$

Su conjunto solución es  $S=\left\{0,\frac{2}{3}\right\}$

**II. Ecuación Completa**  $ax^2+bx+c=0$

a)  $x^2+bx+c=0$ ;  $a=1$ ;  $b \neq 0$ ;  $c \neq 0$

**Ecuación Completa Particular**

b)  $ax^2+bx+c=0$ ;  $a \neq 1$ ;  $b \neq 0$ ;  $c \neq 0$

**Ecuación Completa General**

En el caso de la ecuación completa particular a veces es posible resolverla por factorización de un trinomio ordenado.

**Ejemplos:**

$$x^2+5x+6=0$$

$$(x+2)(x+3)=0$$

$$x+2=0 \vee x+3=0$$

$$\text{Entonces } x_1=-2 \vee x_2=-3$$

$$x^2-2x-15=0$$

$$(x-5)(x+3)=0$$

$$x-5=0 \vee x+3=0$$

$$\text{Entonces } x_1=5 \vee x_2=-3$$

En el caso que el trinomio no sea factorizable,  $x_1$  y  $x_2$  no son enteros particulares, entonces la ecuación completa particular (o completa general) se puede resolver mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con esta fórmula se obtienen sus dos soluciones que son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En general, se puede utilizar esta fórmula para cualquier tipo de ecuación cuadrática.

Ejemplos:

1.  $x^2 - 7x + 6 = 0$

$a=1$ ,  $b=-7$  y  $c=6$ , por lo tanto:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

Entonces:

$$x_1 = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad x_2 = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

2.  $3x^2 + 7x + 2 = 0$

$a=3$ ,  $b=7$  y  $c=2$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6}$$

Entonces

$$x_1 = \frac{-7+5}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} \quad x_2 = \frac{-7-5}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

### DEMOSTRACIÓN FÓRMULA GENERAL

De dónde se obtiene la fórmula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = 0$  Puede dividirse por  $a$  ya que  $a \neq 0$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \quad \text{que equivale a}$$

$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$ , como el primer término es un cuadrado perfecto se formará un cuadrado de binomio

$x^2 + \frac{2bx}{2a} = -\frac{c}{a}$  pero falta agregar el cuadrado del segundo término en ambos lados de la igualdad

$x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$  El lado izquierdo de la igualdad es un cuadrado de binomio

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \sqrt{\quad} \quad \text{Se debe despejar la variable } x$$

$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$  Una base positiva o negativa tiene su cuadrado positivo

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ lo que se expresa como } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Ejercicio N°2:

Resolver ecuaciones cuadráticas

1. La ecuación  $x^2 - 2x - 3 = 0$  tiene como soluciones:

- a) -1 y 3
- b) -3 y -1
- c) -3 y 1
- d) 3 y 1
- e) 0 y 1

3. En la ecuación  $x^2 + 2x - p = 0$  una de sus soluciones es -5, luego el valor de  $p$  es:

- a) 1
- b) 8
- c) -12
- d) 15
- e) -15

2. Las soluciones o raíces de la ecuación

$$x^2 + 10x + 21 = 0 \text{ son:}$$

- a) -3 y -8
- b) 7 y -7
- c) -7 y -3
- d) 3 y 2
- e) -3 y -2

4. El conjunto solución de la ecuación

$$5x(x^2 - 2) = 10x(x - 1) \text{ es:}$$

- a)  $\{0, 2\}$
- b)  $\{0, -2\}$
- c)  $\{2\}$
- d)  $\{2, 5\}$
- e)  $\{0, 5\}$

Claves:

- 1. a
- 2. c
- 3. d
- 4. a

### Ejercicio N°3: Desarrollo

#### I LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO ( $ax^2 + bx + c = 0$ )

Recuerda que para calcular las raíces de una ecuación cuadrática usamos la fórmula  $x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

1.- Determine las raíces o soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$	(b) $3x^2 - 2x - 6 = 0$
(c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$	(a) $x^2 - 2x + 3 = 0$

#### II EL CARÁCTER O NATURALEZA DE LAS RAÍCES O SOLUCIONES

El carácter o naturaleza de las raíces o soluciones depende del signo del discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$

Si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  las raíces son dos distintas y complejas

Si  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$  las raíces son dos iguales y reales

Si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  las raíces son dos distintas y reales

Ejemplo: Determine la naturaleza o carácter de las raíces o soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $3x^2 - 6x + 15 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15$ $= 36 - 180$ $= -144$ $\therefore \Delta = b^2 - 4ac < 0$ las raíces son dos distintas y complejas	(b) $x^2 - 6x + 8 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$ $= 36 - 32$ $= 4$ $\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0$ las raíces son dos distintas y reales	(a) $x^2 + 8x + 16 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16$ $= 64 - 64$ $= 0$ $\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 0$ las raíces son dos iguales y reales
---	---	--

1.- Determine la naturaleza o carácter de las raíces o soluciones en cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$	(b) $3x^2 - 2x - 6 = 0$
(c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$	(a) $x^2 - 2x + 3 = 0$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO: ( $ax^2 + bx + c = 0$ )

- La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es igual al factor numérico de  $x$  con signo contrario, dividido por el factor numérico de  $x^2$  con su propio signo.
- El producto de las raíces de una ecuación de segundo grado es igual al "c" o término libre con su propio signo, dividido por el factor numérico de  $x^2$  con su propio signo.

$$-\frac{b}{a} = (x_1 + x_2) \quad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$

Ejemplo:

<p>Determine la suma y producto de las raíces o soluciones de la siguiente ecuación de segundo grado: <math>4x^2 - 10x + 12 = 0</math></p> <p><b>Solución</b></p> $S = -\frac{b}{a} = -\frac{-10}{+4} = \frac{5}{2}$ $P = \frac{c}{a} = \frac{+12}{+4} = 3$	<p>Determine el valor de la constante "m" en la siguientes ecuación para que se cumpla la condición pedida:</p> <p>a) <math>(m + 10)x^2 + 5x + 2m = 0</math> para que el producto de las raíces sea igual a 3</p> $\frac{c}{a} = \frac{+2m}{m + 10} = 3$ <p>O sea</p> $\frac{+2m}{m + 10} = 3$ <p>Multiplicamos por <math>m + 10</math> tenemos</p> $2m = 3(m + 10)$ $2m = 3m + 30$ $m = -30$
---	---

1.- Determine la suma y producto de las raíces o soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

<p>(a) <math>3x^2 - 6x + 15 = 0</math></p> <p>S =</p> <p>P =</p>	<p>(a) <math>x^2 - 7x - 6 = 0</math></p> <p>S =</p> <p>P =</p>	<p>(c) <math>3x^2 - 5x = 0</math></p> <p>S =</p> <p>P =</p>
<p>(c) <math>3x^2 + 8 = 0</math></p> <p>S =</p> <p>P =</p>	<p>(f) <math>2x^2 + 5kx + 3k^2 = 0</math></p> <p>S =</p> <p>P =</p>	<p>(g) <math>(m^2 - n^2)x^2 - mnx + (m + n) = 0</math></p> <p>S =</p> <p>P =</p>

## REVISALO QUE HAS APRENDIDO

- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es de segundo grado?  
 A)  $x^2 - 2x = 0$       B)  $(x + 1)x + 2 = 0$       C)  $(2x + 1)2 = 4x^2$       D)  $(x + 3)(x - 3) = 2x$       E)  $x^2 - 5x = x$
- ¿Cuáles son las soluciones (o raíces) de la ecuación  $x^2 + 6x - 16 = 0$ ?  
 A) 4 y -4      B) 8 y -2      C) -4 y -4      D) 1 y -16      E) 2 y -8
- ¿Cuál es la suma de las soluciones (o raíces) de la ecuación  $5x^2 + 10x + 1 = 0$ ?  
 A) -2      B) -1/5      C) 1/5      D) 1/2      E) 2
- ¿Cuál es el producto de las soluciones (o raíces) de la ecuación  $5x^2 - 6x + 1 = 0$ ?  
 A) -3/5      B) -1/5      C) 1/5      D) 3/5      E) 6/5
- Una ecuación de segundo grado cuyas raíces,  $x_1$  y  $x_2$ , satisfacen las igualdades  $(x_1 + x_2) = -2$  y  $x_1 \cdot x_2 = 5$  es  
 A)  $x^2 - 2x - 5 = 0$       B)  $x^2 - 2x + 5 = 0$       C)  $x^2 + 2x + 5 = 0$       D)  $x^2 + 2x - 5 = 0$       E)  $x^2 - 5x - 2 = 0$
- La suma de las soluciones de la ecuación  $x^2 = 64$  es.  
 A) 64      B) 16      C) 8      D) 0      E) -8
- ¿Qué valor debe tener k en la ecuación  $3x^2 - 5kx - 2 = 0$ , para que una de sus raíces sea -2?  
 A) 0      B) 1      C) -1      D) -20      E) -4

Completa la siguiente tabla:

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

**INVESTIGA SOBRE EL MÉTODO DE COMPLETACIÓN DE CUADRADOS PARA RESOLVER ECUACIONES CUADRÁTICAS**