Logaritmos

Profesor:
Elías Figueroa Quiroz

Objetivos.

- Comprender la definición de logaritmo y su escritura como una potencia.

- Calcular logaritmos.

- Comprender y calcular logaritmos decimales.

Definición.

Logaritmo de un número, en una base determinada, es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_{a} \boxed{b} = \boxed{n}$$

n → Logaritmo

a → Base

b → Argumento

Se lee: *"logaritmo en base **a** de **b**"*

Todo logaritmo tiene como restricción que los términos $a, b > 0$

Transformación a Potencia.

$$\log_a b = n \quad \Leftrightarrow \quad a^n = b$$

“La base elevada al logaritmo es igual al argumento”

$$\log_r s = u \quad \Leftrightarrow \quad r^u = s$$

$$\log_6 7 = x \quad \Leftrightarrow \quad 6^x = 7$$

$$\log_a (x-4) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a^8 = x-4$$

$$\log_2 8 = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 8$$

$$\log_5 k = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5^3 = k$$

Cálculo de Logaritmos.

"Es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener el argumento"

Caso 1: Base y argumento enteros, con base menor.

$$\log_4 16 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$\log_2 32 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

$$\log_3 27 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

"El logaritmo siempre será positivo"

Cálculo de Logaritmos.

<u>Caso 2:</u> Base y argumento enteros, con base mayor.

$$\log_{64} 4 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\log_{216} 6 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\log_{25} 5 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

"El logaritmo siempre será racional positivo"

Cálculo de Logaritmos.

Caso 3: Base entera y argumento racional.

$$\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

$$\log_7\left(\frac{1}{343}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$$

$$\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

"El logaritmo siempre será negativo"

Cálculo de Logaritmos.

<u>**Caso 4:**</u> Base racional y argumento entero.

$$\log_{\frac{1}{6}} 36 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 81 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

$$\log_{\frac{1}{9}} 81 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

"El logaritmo siempre será negativo"

Cálculo de Logaritmos.

<u>Caso 5:</u> Base y argumento racional.

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{125}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

$$\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{64}{27}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$$

"El signo del logaritmo depende de la relación cruzada o lineal de la base con el argumento"

Logaritmo Decimal.

Los logaritmos decimales son los que poseen como base el número 10. Esta base no se escribe en el logaritmo.

$$\log 100 \qquad ; \quad \log 100.000 \qquad ; \quad \log 0,00001$$

$$2 \qquad\qquad\qquad 5 \qquad\qquad\qquad -5$$

Para obtener el resultado de un logaritmo decimal se utiliza la notación científica, es decir, si el número es entero se cuenta la cantidad de ceros *(positivo),* en caso contrario, se cuentan la cantidad de decimales *(negativo).*

Preguntas de cierre.

¿Qué es un logaritmo?

¿Cómo se lee $\log_2 \frac{1}{8} = x$?

¿Cómo se escribe como potencia $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$?

¿Cuándo un logaritmo es negativo?

¿Cuándo un logaritmo es positivo?

¿Qué base tiene un logaritmo decimal?

Objetivos.

- Aplicar las propiedades de los logaritmos para ampliar y reducir expresiones.

Propiedades Logaritmos.

a) Logaritmo de la base: $\log_a a = 1$

Ejemplos:

$\log_{12} 12 = 1$ $\log_{2x+5}(2x+5) = 1$

b) Logaritmo de la unidad: $\log_a 1 = 0$

Ejemplos:

$\log_5 1 = 0$ $\log_{x^2-6x+9} 1 = 0$

Propiedades Logaritmos.

c) Logaritmo del producto: $$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$$

Ejemplos:

$$\log_8 2 + \log_8 4 = \log_8 2 \cdot 4 = \log_8 8 = 1$$

$$\log 5 + \log 10 + \log 2 = \log 5 \cdot 10 \cdot 2 = \log 100 = 2$$

d) Logaritmo del cuociente: $$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

Ejemplos:

$$\log_3 21 - \log_3 7 = \log_3 \left({}^{21}\!/_{7}\right) = \log_3 3 = 1$$

$$\log_6 24 - \log_6 15 = \log_3 \left({}^{24}\!/_{15}\right) = \log_3 \left({}^{8}\!/_{5}\right)$$

Propiedades Logaritmos.

e) Logaritmo de una potencia: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Ejemplos:

$$\log_4 2^5 = 5 \cdot \log_4 2 = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\log 12^2 = 2 \cdot \log 12$$

Propiedades Combinadas.

Se debe considerar el siguiente orden para desarrollar propiedades combinadas:

1. Potencias – Productos – Cuocientes.

$$2\log 3 + 3\log 2 = \log 3^2 + \log 2^3 = \log 9 + \log 8 = \log 72$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}\log_2 6 - 4\log_2 2 &= \log_2 6^{2/5} - \log_2 2^4 \\
&= \log_2 \sqrt[5]{6^2} - \log_2 16 \\
&= \log_2 \left(\frac{\sqrt[5]{36}}{16} \right)
\end{aligned}$$

Propiedades Combinadas.

$$\log 6 + \log 4 + \log 3 - \log 8 - \log 5$$

$$\log 6 \cdot 4 \cdot 3 - \log 8 - \log 5$$

$$\log 72 - \log 8 - \log 5$$

$$\log\left(\frac{72}{8}\right) - \log 5$$

$$\log 9 - \log 5$$

$$\log\left(\frac{9}{5}\right)$$

$$\log\left(\frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 5}\right)$$

$$\log\left(\frac{72}{40}\right)$$

$$\log\left(\frac{9}{5}\right)$$

Objetivos.

- Utilizar la propiedad del cambio de base para resolver un logaritmo.

- Resolver una ecuación exponencial utilizando la propiedad del cambio de base.

$$6^x = 7$$

¿Cuál es el valor de x?

Cambio de Base.

Para el cambio de base se deben separar en una división de logaritmos, considerando que el argumento inicial queda como argumento del numerador y la base inicial como argumento del denominador. Además, la base debe ser una potencia común del argumento y de la base.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ejemplos:

$$\log_{27} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 27} = \frac{2}{3}$$

$$\log_{32} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{7}{5}$$

Resolución de logaritmos decimales.

Se utiliza cuando el argumento no tiene una potencia común con la base. En este caso, se utiliza la base 10.

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

Ejemplos:

$$\log_3 6 = \frac{\log 6}{\log 3} = \frac{0,778}{0,477} = 1,631$$

$$\log_{15} 2 = \frac{\log 2}{\log 15} = \frac{0,301}{1,176} = 0,255$$

Resolución de logaritmos decimales.

Ejemplos:

$$2^x = 3 \Leftrightarrow \log_2 3 = x \Leftrightarrow \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,477}{0,301} = 1,584$$

$$9^x = 5 \Leftrightarrow \log_9 5 = x \Leftrightarrow \frac{\log 5}{\log 9} = \frac{0,698}{0,954} = 0,731$$

¿Cuál es el valor de x?

$$6^x = 7$$

Preguntas de cierre.

¿Para qué sirve el cambio de base?

¿Cómo se selecciona la base en común al aplicar el cambio de base?

¿Qué tipo de ecuación se puede resolver a través del cambio de base?

Si no existe base común entre argumento y base ¿Qué base se utiliza al realizar el cambio de base?

Objetivos.

- Resolver ecuaciones logarítmicas utilizando propiedades de logaritmos.

$$\log 2+\log\left(x-2\right)=\log\left(3x+4\right)+2\log 2$$

¿Cuál es el valor de x?

Recordando propiedades

$$\log 2+\log\left(x-7\right)= \log 2\left(x-7\right)= \log\left(2x-14\right)$$

$$\log 12x-\log 4= \log\frac{12x}{4}= \log 3x$$

$$4\log 2+\log\left(2x+5\right)= \log 16+\log\left(2x+5\right)= \log\left(32x+80\right)$$

Ecuaciones logarítmicas.

Una ecuación logarítmica es aquella que posee la incógnita en el argumento del logaritmo. Para su resolución se deben aplicar las propiedades de logaritmos, de modo de obtener un solo logaritmo cada lado de la igualdad, para luego eliminar los logaritmos y conservar los argumentos.

$$\cancel{\log_a}(3x+1)=\cancel{\log_a} 7x$$

$$3x+1=7x$$

$$1=4x \Leftrightarrow \frac{1}{4}=x$$

Ecuaciones logarítmicas.

$$\log_3 5x + \log_3 2 = \log_3 35$$

$$\cancel{\log_3} 10x = \cancel{\log_3} 35$$

$$10x = 35$$

$$x = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

$$\log x - \log 3 = \log 4 + \log 2$$

$$\cancel{\log}\left(\frac{x}{3}\right) = \cancel{\log} 8$$

$$\frac{x}{3} = 8 \quad = 24$$

$$\log 45x - 3\log 3 = \log 9$$

$$\log 45x - \log 27 = \log 9$$

$$\cancel{\log}\left(\frac{45x}{27}\right) = \cancel{\log} 9$$

$$\frac{5x}{3} = 9$$

$$x = \frac{27}{5}$$

Ecuaciones logarítmicas.

$$\log 3x = 2$$

$$\cancel{\log} 3x = \cancel{\log} 100$$

$$3x = 100$$

$$x = \frac{100}{3}$$

$$\log_2 6x + \log_2 7 = 5$$

$$\cancel{\log_2} 42x = \cancel{\log_2} 32$$

$$42x = 32$$

$$x = \frac{32}{42} = \frac{16}{21}$$

¿Cuál es el valor de x?

$$\log 2 + \log\left(x-2\right) = \log\left(3x+4\right) + 2\log 2$$

Preguntas de cierre.

¿Qué es una ecuación logarítmica?

¿Cuándo se eliminan los logaritmos al resolver una ecuación logarítmica?

¿Por qué logaritmo se debe reemplazar ‘3’ en la ecuación logarítmica $\log_3 5x = 3$?