GUÍA DE AUTOAPRENDIZAJE N°1: RAÍCES: CÁLCULO Y PROPIEDADES

Nombre:____ Curso: II° Medio __

Objetivos de Aprendizaje:
- Reconocer el concepto de raíces.
- Calcular raíces utilizando su definición.
- Reconocer y aplicar las propiedades de las raíces.
- Realizar adiciones y sustracciones de raíces.

Concepto de raíz

Es la obtención de un numero, que ha sido multiplicado "*n* veces" por si mismo.bajo el operador raíz ($\sqrt[n]{m} = b$)

En donde

n: **índice radical**, o **índice** de la raiz, que indica las veces que ha sido multiplicado cierto numero.

m: **subradical o radicando,** indica el producto de aquella multiplicación de cierto número.

b: **es la raíz** (raíz aritmética) o el numero buscado, que ha sido multiplicado "n veces por si mismo"

Se llama **raíz** (*o raíz aritmética*) de un número m de índice n y se escribe $\sqrt[n]{m}$, a un número que cumple:

$$\left(\sqrt[n]{m}\right)^n = m$$

Propiedad de las raíces

- Si $m > 0$: $\sqrt[n]{m}$ existe cualquiera que sea n

  Cuando $m > 0$, $\sqrt[n]{m}$ es un número positivo (y es único)
- Si $m < 0$: sólo existe la raíz $\sqrt[n]{m}$ cuando el índice n es impar.

  Cuando el índice n es impar, y $m < 0$: $\sqrt[n]{m}$ es negativo (y es único).

Véase el siguiente ejemplo:

a) $\sqrt{16} = 4$, el índice radical es 2, que no se escribe por conveniencia y se lee raíz cuadrada de 16(radicando), la pregunta fue ¿Qué numero multiplicado por si mismo da como resultado 16?. Resp: 4

b) $\sqrt[3]{8} = 2$, el índice radical es 3, y se lee raíz cúbica de 8(radicando), la pregunta fue ¿Qué numero multiplicado tres veces por si mismo da como resultado 8?. Resp: 2

Ejercicios resueltos

1) $\sqrt{25} = 2$ **2)** $\sqrt{225} = 15$ **3)** $\sqrt[3]{-27} = -3$ **4)** $\sqrt[5]{32} = 2$ **5)** $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

Resuelva aplicando el concepto de raíz. [Recuerde que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a$]

1) $\sqrt{\frac{4}{9}} =$ **2)** $\sqrt{\frac{1}{9}} \bullet \sqrt{\frac{81}{4}} \bullet \sqrt{\frac{49}{36}} =$ **3)** $\sqrt{0,25} + \sqrt[3]{0,125} =$ **4)** $\sqrt[4]{16} \bullet \left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{7}}\right) =$

5) $\sqrt[4]{\frac{3x^4}{16}} =$ **6)** $\sqrt[3]{-0,027} =$ **7)** $\sqrt{\frac{400}{289}} =$ **8)** $\sqrt{\frac{16}{81}} - 3\sqrt{\frac{25}{9}} + \sqrt{\frac{1}{9}} =$

9) $\left(\sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{9}}\right) \div \sqrt{\frac{4}{9}} =$ **10)** $\sqrt{\frac{25}{4}} + 8\sqrt{\frac{16}{8}} - \sqrt{\frac{1}{36}} =$

Departamento de Matemática
Profesor Elías Figueroa Quiroz

PROPIEDADES DE LAS RÁICES

1. **Simplificación de índice y exponente.**

$$\sqrt[an]{a^{am}} = a^{\frac{am}{an}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

"se mantiene la base y se simplifican el exponente como numerador y el índice como denominador"

Ejemplos:

$$\sqrt[6]{4^4} = 4^{\frac{4}{6}} = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$$

$$\sqrt[3]{5^9} = 5^{\frac{9}{3}} = 5^3 = 125$$

Ejercicios:

$\sqrt[8]{3^{18}}$	$\sqrt{2^{12}}$
$\sqrt[28]{6^{32}}$	$\sqrt[15]{7^{50}}$
$\sqrt[9]{4^{54}}$	$\sqrt[6]{8^{12}}$
$\sqrt[4]{5^{16}}$	$\sqrt[7]{9^{27}}$

2. **Multiplicación (y División) de raíces de igual índice y exponente.**

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$$

"se mantiene el índice y el exponente y se multiplican las bases"

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{7 \cdot 3} = \sqrt[3]{21}$$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{6 \cdot 9} = \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9}$$

De la misma forma ocurre con la división.

$$\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a:b)^m} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

"se mantiene el índice y el exponente y se dividen las bases"

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{3}} = \sqrt[6]{\frac{7}{3}}$$

$$\sqrt[8]{\frac{25}{12}} = \frac{\sqrt[8]{25}}{\sqrt[8]{12}}$$

Ejercicios:

$\sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[8]{9}$	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{4}$
$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{15}$	$\sqrt[7]{10} \cdot \sqrt[7]{11}$
$\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{12}$	$\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{13}$
$\sqrt[9]{16} \cdot \sqrt[9]{5}$	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{6}$
$\sqrt[8]{3} : \sqrt[8]{9}$	$\sqrt{7} : \sqrt{4}$
$\sqrt[5]{3} : \sqrt[5]{15}$	$\sqrt[7]{10} : \sqrt[7]{11}$
$\sqrt[4]{96} : \sqrt[4]{12}$	$\sqrt[3]{78} : \sqrt[3]{39}$
$\sqrt[9]{16} : \sqrt[9]{5}$	$\sqrt{7} : \sqrt{6}$

3. Multiplicación (y División) de potencias de igual subradical e índice, pero distinto exponente.

$$\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{p+m}}$$

“se mantienen el subradical y el índice y los exponentes se suman”

Ejemplos:

$$\sqrt{5^3} \cdot \sqrt{5^4} = \sqrt{5^{3+4}} = \sqrt{5^7}$$

$$\sqrt[4]{2^5} \cdot \sqrt[4]{2^{11}} = \sqrt[4]{2^{5+11}} = \sqrt[4]{2^{16}} = 2^4 = 16$$

De la misma forma ocurre con la división.

$$\sqrt[n]{a^p} : \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{p-m}}$$

“se mantienen el subradical y el índice y los exponentes se restan”

Ejemplos:

$$\sqrt{5^{15}} : \sqrt{5^4} = \sqrt{5^{15-4}} = \sqrt{5^{11}}$$

$$\sqrt[4]{2^{17}} : \sqrt[4]{2^{13}} = \sqrt[4]{2^{17-13}} = \sqrt[4]{2^4} = 2^1 = 2$$

Ejercicios:

$\sqrt[8]{4^4} \cdot \sqrt[8]{4^6}$	$\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^9}$
$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8^6}$	$\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[9]{2^{11}}$
$\sqrt[4]{3^6} \cdot \sqrt[4]{3^7}$	$\sqrt[5]{2^7} \cdot \sqrt[5]{2^3}$
$\sqrt[9]{8^5} \cdot \sqrt[9]{8^2}$	$\sqrt[6]{3^8} \cdot \sqrt[6]{3}$
$\sqrt[7]{8^{18}} : \sqrt[7]{8^4}$	$\sqrt[3]{2^5} : \sqrt[3]{2^2}$
$\sqrt[9]{15^9} : \sqrt[9]{15^3}$	$\sqrt[4]{6^{16}} : \sqrt[4]{6^{13}}$
$\sqrt[5]{7^{22}} : \sqrt[5]{7^5}$	$\sqrt[3]{6^{12}} : \sqrt[3]{6^6}$
$\sqrt[6]{4^6} : \sqrt[6]{4}$	$\sqrt[5]{2^6} : \sqrt[5]{2^2}$

4. Multiplicación (y División) de potencias igual subradical, pero distinto índice y exponente.

$$\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[q]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{nm+pq}}$$

"se mantienen el subradical, se mantiene como índice la multiplicación de ambos y para el exponente se suma la multplicación cruzada de los índices y exponentes de las raíces"

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt{5^4} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{3\cdot 4+3\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^{18}} = 5^3 = 125$$

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[4\cdot 3]{2^{4\cdot 5+1\cdot 3}} = \sqrt[12]{2^{23}}$$

De la misma forma ocurre con la división.

$$\sqrt[n]{a^p} : \sqrt[q]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{nm-pq}}$$

"se mantienen el subradical, se mantiene como índice la multiplicación de ambos y para el exponente se resta la multplicación cruzada de los índices y exponentes de las raíces"

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{5^3} : \sqrt{5^4} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{3\cdot 4-3\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^6} = 5^1 = 5$$

$$\sqrt[4]{2} : \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[4\cdot 3]{2^{4\cdot 5-1\cdot 3}} = \sqrt[12]{2^{17}}$$

Ejercicios:

$\sqrt[8]{4^4} \cdot \sqrt[2]{4^6}$	$\sqrt[4]{5^2} \cdot \sqrt{5^9}$
$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{8^6}$	$\sqrt[3]{2^8} \cdot \sqrt[9]{2^{11}}$
$\sqrt[5]{3^6} \cdot \sqrt[4]{3^7}$	$\sqrt[6]{2^7} \cdot \sqrt[5]{2^3}$
$\sqrt{8^5} \cdot \sqrt[9]{8^2}$	$\sqrt[5]{3^8} \cdot \sqrt[6]{3}$
$\sqrt[9]{8^{18}} : \sqrt[7]{8^4}$	$\sqrt[8]{2^5} : \sqrt[3]{2^2}$
$\sqrt[7]{15^9} : \sqrt[9]{15^3}$	$\sqrt[3]{6^{16}} : \sqrt[4]{6^{13}}$
$\sqrt[4]{7^2} : \sqrt[5]{7^5}$	$\sqrt[4]{6^2} : \sqrt[3]{6^6}$
$\sqrt[6]{4^6} : \sqrt[8]{4}$	$\sqrt[5]{2^6} : \sqrt{2^2}$

5. **Composición de raíces.**

$$\boldsymbol{b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}}$$

"el número se ingresa a la raíz multiplicando al subradical y elevado al índice de la misma"

Ejemplos:

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{5 \cdot 8} = \sqrt[3]{40}$$
$$3\sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{10 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{10 \cdot 81} = \sqrt[4]{810}$$

Ejercicios:

$7\sqrt{8}$	$5\sqrt[3]{3}$
$3\sqrt[5]{2}$	$5\sqrt{10}$
$3\sqrt[3]{5}$	$4\sqrt{7}$
$2\sqrt[8]{3}$	$6\sqrt{12}$

6. Raíz de una raíz.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

"se mantiene el subradical y se multiplican los índices"

Ejemplos:

$$\sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[2\cdot 3]{3} = \sqrt[6]{3}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[6]{120}}} = \sqrt[3\cdot 5\cdot 6]{120} = \sqrt[90]{120}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{5}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{5\cdot 2^4}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{5\cdot 16}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{80}} = \sqrt[3\cdot 4]{80} = \sqrt[12]{80}$$

Ejercicios:

$\sqrt[5]{\sqrt{8}}$	$\sqrt[3]{\sqrt[6]{16}}$
$\sqrt[8]{\sqrt[3]{74}}$	$\sqrt[9]{\sqrt[4]{52}}$
$\sqrt[3]{3\sqrt[3]{7}}$	$\sqrt{2\sqrt[6]{8}}$
$\sqrt[3]{\sqrt[9]{4\sqrt[3]{2}}}$	$\sqrt{2\sqrt[3]{7\sqrt{10}}}$

7. Descomposición de raíces.

$$\sqrt[n]{a \cdot b^n} = b\sqrt[n]{a}$$

"el número subradical se descompone en dos factores, de manera que un factor sea una potencia con igual exponente que el índice de la raíz y así escribirlo fuera de la raíz sin el exponente"

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{5 \cdot 8} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} = 2\sqrt[3]{5}$$

Ejercicios:

1) $\sqrt{8} =$	2) $\sqrt{12} =$	3) $\sqrt{27} =$	4) $\sqrt{48} =$
5) $\sqrt{75} =$	6) $\sqrt{80} =$	7) $\sqrt{128} =$	8) $\sqrt{216} =$
9) $\sqrt{45} =$	10) $\sqrt{72} =$	11) $\sqrt{112} =$	12) $\sqrt{50} =$
13) $\sqrt{243} =$	14) $\sqrt{176} =$	15) $\sqrt{325} =$	16) $\sqrt{343} =$

Colegio MARÍA GRISELDA VALLE
El Bosque
Departamento de Matemática
Profesor Elías Figueroa Quiroz

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RAÍCES

Caso 1
Podemos sumar y restar radicales solamente cuando estos tengan el mismo índice y contengan una misma cantidad subradical o radicando.

Ejemplo: $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}=(3+5-1)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

Se pide realizar una operación combinada de suma y resta, lo cual podremos hacer ya que todos los términos tienen $\sqrt{2}$

Caso 2
¿Podremos sumar y restar radicales que tengan el mismo índice pero que tengan distintos radicandos?

Ejemplo: $3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{5}=$

Aquí también se pide realizar una operación combinada de suma y resta. Sin embargo, no será posible porque los tres radicales poseen el mismo índice (2) y sus cantidades subradicales o radicandos son diferentes, además de que son números primos y no se pueden **factorizar** .

Pero, veamos otro ejemplo:

$$\sqrt{108}+\sqrt{27}-\sqrt{75}=\sqrt{2^3\bullet 3^3}+\sqrt{3^3}-\sqrt{3\bullet 5^2}=2\bullet 3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=$$

Esta también es una operación combinada de sumas y restas de radicales que tienen el mismo índice (2) pero tienen distintas cantidades subradicales. Pero aquí hay una diferencia: los radicandos se pueden **factorizar** , de tal modo que:

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

27	3
9	3
3	3
1	

75	3
25	5
5	5
1	

$$\sqrt{108}=\sqrt{2\bullet 2\bullet 3\bullet 3\bullet 3}=\sqrt{2^2\bullet 3^3}=2\bullet 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{27}=\sqrt{3\bullet 3\bullet 3}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{75}=\sqrt{3\bullet 5\bullet 5}=\sqrt{3\bullet 5^2}=5\sqrt{3}$$

Para quedar $6\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(6+3-5)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

Ejercicios:

1) $\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}$
2) $\sqrt{80}-2\sqrt{252}+3\sqrt{405}-3\sqrt{500}$
3) $\sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{48}+\sqrt{72}$
4) $\sqrt{147}-\sqrt{700}+\sqrt{28}$
5) $\sqrt{175}+\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\sqrt{75}$
6) $\sqrt{176}-\sqrt{45}+\sqrt{320}+\sqrt{275}$

¡ÉXITO!