Colegio MARÍA GRISELDA VALLE
El Bosque
Departamento de Matemática
Profesor Elías Figueroa Quiroz

GUÍA DE AUTOAPRENDIZAJE N°3: NÚMEROS IRRACIONALES

Nombre:____ Curso: II° Medio __

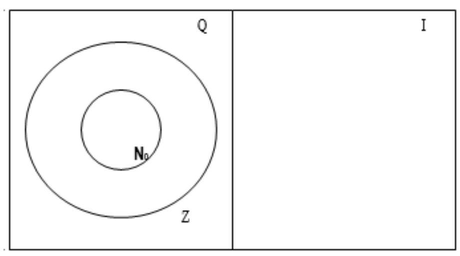
Objetivos de Aprendizaje:

- Reconocer los números irracionales como parte del conjunto de los números reales.
- Identificar números irracionales importantes.
- Reconocer propiedades de los números irracionales.
- Ubicar números irracionales en la recta numérica.

INTRODUCCIÓN

El conjunto de los **números irracionales** está formado por los números que no pueden ser expresados como fracción. Son números cuya expresión decimal tiene un número infinito de cifras que no se repiten de forma periódica, y se representa con la letra **I**.

La unión entre el conjunto de los números racionales e irracionales es el conjunto de los números reales simbolizados con la letra **R**.



R: Q ∪ I

Con el conjunto de los números irracionales la recta numérica queda "completa". Es decir, el conjunto de los números reales queda totalmente representado con la recta numérica, a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real y viceversa.

Existen infinitos números irracionales: $\sqrt{2}$ es irracional, y, en general, lo es cualquier raíz no exacta, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, ... , π también es irracional y podemos generar números irracionales combinando sus cifras decimales, por ejemplo a = 0,010010001... o b = 0,020020002...

Con estos números podemos calcular soluciones en ecuaciones de segundo grado ($x^2 = 2 \rightarrow x=\sqrt{2}$, que no es racional), la longitud de una circunferencia ($L = 2\pi r$, donde π no es racional), etc.

Demostrando que $\sqrt{2}$ es un número irracional:

Para determinar que $\sqrt{2}$ es un **número irracional**, utilizamos una demostración por **reducción al absurdo**.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Luego, se podría escribir $\sqrt{2}$ como una fracción irreducible $\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$.

Es decir, m y n no tienen factores comunes distintos de 1.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \xrightarrow{\text{Al multiplicar por } n} \sqrt{2} \cdot n = m \xrightarrow{\text{Al elevar al cuadrado.}} 2n^2 = m^2$$

Entonces, 2 divide necesariamente a m^2, y como 2 es un número primo, también divide a m, por lo tanto m^2 es múltiplo de 4, o sea que para algún número natural k se cumple que $m^2 = 4k$.

$2n^2 = m^2 = 4k \longrightarrow$ Porque $2n^2 = m^2$ y también $m^2 = 4k$.

$n^2 = 2k \longrightarrow$ Dividiendo por 2.

Es decir, necesariamente 2 divide a n^2, y como es número primo, 2 divide también a n.

Pero entonces se acaba de demostrar que 2 divide a m y a n, los que por hipótesis no tenían factores comunes. Esta es una contradicción. Por lo tanto, la suposición de que $\sqrt{2}$ es un número racional es imposible. Así, queda demostrado que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

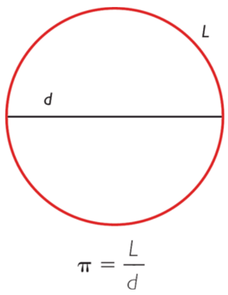
Los números irracionales de este tipo $\sqrt{a}$, con a un número natural, se pueden representar de manera exacta en la recta numérica utilizando el teorema de Pitágoras; para los demás, se calcula su expresión decimal y se representa una aproximación.

Colegio MARÍA GRISELDA VALLE
El Bosque

Departamento de Matemática
Profesor Elías Figueroa Quiroz

Números irracionales importantes

Los números irracionales más utilizados en Matemáticas, y que destacan por su presencia en numerosos contextos reales, son π (se lee *pi*), e y el número áureo Φ (se lee *fi*).



El número π

El número pi, cuyo símbolo es π, es el cociente entre la longitud y el diámetro de una circunferencia. Tiene infinitas cifras decimales, aunque usualmente se utiliza como valor la aproximación 3,14.

π = 3,14159265358979...

Para realizar cálculos con el número π podemos hacerlo tomando un redondeo de este, usualmente 3,14 o 3,1416, o bien podemos usar la calculadora.

El número *e*

El número *e* es un número irracional cuya expresión decimal es: ***e* = 2,7182818284...**

Este número debe su nombre a un famoso matemático suizo, Leonhard Euler (1707-1783); se llama e por la inicial de su apellido. Aparece muchas veces en contextos reales relacionados con multitud de áreas de conocimiento: en Economía, para generar modelos económicos de carácter predictivo; en Biología, para explicar el crecimiento de poblaciones y en la datación de fósiles; en Sanidad, para estudiar y evaluar enfermedades epidémicas, etc.

El número áureo, Φ

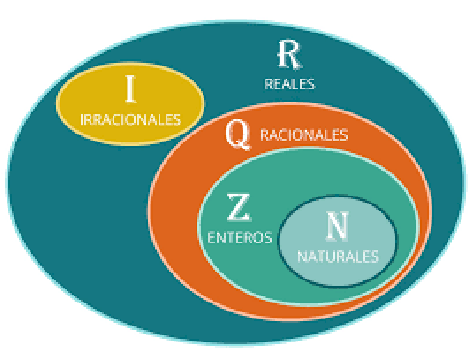
El número áureo, o número de oro, es el número irracional cuya expresión decimal es: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$

Este número ya era utilizado por los griegos en las proporciones de sus construcciones. En la fachada del Partenón, que vemos en la fotografía del margen, el cociente de su anchura y su altura es el número de oro. En la actualidad se sigue utilizando en la concepción y diseño de multitud de objetos (billetes, tarjetas de crédito...) y elementos arquitectónicos y artísticos.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

- Propiedad Conmutativa: al sumar o multiplicar números irracionales también se cumple la propiedad conmutativa según la cual el orden de los factores no altera el resultado, por ejemplo, **π + ϕ = ϕ + π**; así como en la multiplicación, **π × ϕ=ϕ × π**.
- Propiedad Asociativa: los números irracionales pueden distribuirse o agruparse de distinta manera entre sí y el resultado será el mismo. Por ejemplo, en la suma, será **(ϕ + π) + e = ϕ + (π + e)**; y de la misma manera en la multiplicación, **(ϕ × π) × e = ϕ × (π × e)**.
- Propiedad Cerrada: es decir que el resultado de la suma, resta, multiplicación, división o potenciación de un número irracional siempre será un número irracional. Sin embargo, la propiedad cerrada no se cumple en el caso de la radicación.
- Elemento Opuesto: existe un inverso aditivo, para la suma de números irracionales; es decir que para cada número existe su negativo que lo anula, por ejemplo, **π – π = 0** y de la misma forma un inverso multiplicativo que da como resultado 1, es decir **ϕ × 1/ϕ = 1.**
- La multiplicación es distributiva en relación con la suma. Ejemplo: **(3 + 2) π = 3π + 2π = 5π**.

Finalmente tenemos:



Colegio MARÍA GRISELDA VALLE
El Bosque
Departamento de Matemática
Profesor Elías Figueroa Quiroz

UBICACIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES EN LA RECTA NUMÉRICA

Cuando trazamos una recta y a cada uno de sus puntos le asociamos un número, entonces tenemos una recta numérica. Todo número puede representarse en la recta.

1. Números irracionales en la recta numérica

A cada número racional le corresponde un punto en la recta, pero en realidad éstos no completan la recta, también la constituyen los irracionales. En general, representar un número con infinitas cifras decimales no periódicas es imposible y por lo tanto nos tendríamos que conformar con una aproximación.
Sin embargo, con la ayuda del Teorema de Pitágoras es difícil representar geométricamente muchos números irracionales como √2, √3, √5, √6, √7, √8, √10,etc.

Veamos cómo se puede representar, por ejemplo, √2
√2 = 1,414...,es decir, 1< √2 < 2

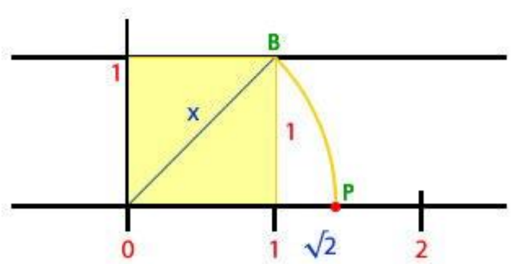
Para representarlo debemos seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Construir sobre la recta numérica un triángulo rectángulo de dimensiones 1cm de ancho 1cm de alto y vamos a llamar x a la hipotenusa.

Paso 2: Aplicar el Teorema de Pitágoras como sigue:

$$X^2 = 1^2 + 1^2$$
$$X^2 = 2$$
$$X = \sqrt{2}$$

Paso 3: Ya sabemos que el valor de la hipotenusa tiene como valor raíz de 2, luego con la ayuda de un compás podemos representar en la recta el valor de √2 de la siguiente manera. Con tu compás toma la dimensión de la hipotenusa, que en este caso es √2, y toma como centro el cero. Luego trazas un arco de circunferencia y el punto de corte con la recta numérica será el valor de raíz de 2 (longitud desde el punto cero al punto P).



Con la ayuda de un compás podemos representar exactamente √2 en la recta numérica.

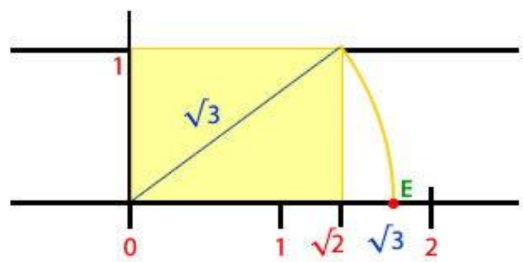
Sabemos que √2 es un número irracional, por lo tanto, el punto P de la recta no puede estar ocupado por ningún otro número irracional.
En general, para localizar de manera geométrica √n, siendo n cualquier número natural, se puede aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo de catetos 1 y la raíz cuadrada del número natural anterior, es decir, √n-1.
Por ejemplo, con el segmento de longitud √2 y un segmento de longitud 1, se construye un nuevo triángulo rectángulo. Se traza un arco de circunferencia centrada en el punto 0, y de radio igual a la hipotenusa de este nuevo triángulo. La intersección de este arco con la recta numérica es el punto √3 .

Otra forma de representar una raíz es escribir el número que está dentro de la raíz, como la suma de dos números al cuadrado (por el Teorema de Pitágoras)

Por ejemplo: $\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{2^2} + 1^2}$

Buscamos 2 números al cuadrado que sumados me den raíz de 3 y el único número al cuadrado que encuentro es la raíz de 2 y 1 al cuadrado. Estos dos números representan las medidas de los catetos del triángulo rectángulo.

Quedaría así:

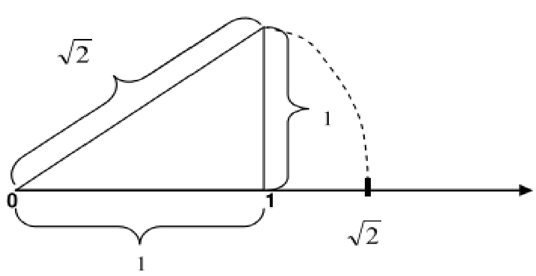


Sintetizando tenemos:

a. Representación de $\sqrt{2}$.
En un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 1,

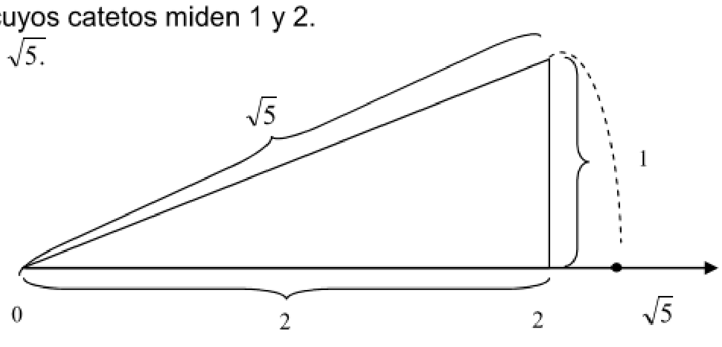
el valor de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$

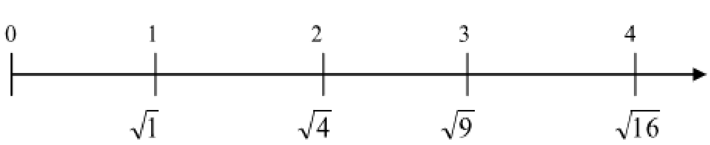


b. Representación de $\sqrt{5}$
En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2.
el valor de la hipotenusa es $\sqrt{5}$.

$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$



Las raíces cuadradas exactas determinan el resultado aproximado de las que son números irracionales.



$1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$

$2 < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < 3$

$3 < \sqrt{10} < \sqrt{11} < \sqrt{12} < \sqrt{13} < \sqrt{14} < \sqrt{15} < 4$

2. Orden de las raíces cuadradas
Mientras mayor sea la cantidad subradical mayor es la raíz. $\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7}$

Por ejemplo: Ordena de menor a mayor las siguientes raíces: $\sqrt{14}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{17}$.

Respuesta: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{14}$; $\sqrt{17}$

Colegio MARÍA GRISELDA VALLE
El Bosque
Departamento de Matemática
Profesor Elías Figueroa Quiroz

ACTIVIDAD N°1

I. Se tienen los siguientes irracionales: $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$
Se pide ubicarlos en una recta numérica, para ello realiza lo siguiente:
a) Realiza el proceso indicado anteriormente utilizando el teorema de Pitágoras para cada uno de los 10 números irracionales dados.
b) Luego representa gráficamente cada número irracional.
c) Finalmente representa los 10 números irracionales en una misma recta numérica.

Adjunta el desarrollo y la recta con los 10 primeros números irracionales en una hoja cuadriculada.

II. Se sabe que las raíces cuadradas de números naturales obtienen números irracionales; pero también, hay algunas raíces, cuyo valor es un número entero. Escribe las 20 primeras raíces cuadradas exactas.

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.
11.	12.	13.	14.	15.
16.	17.	18.	19.	20.

III. A partir de la definición de una raíz, indica las 10 primeras raíces cúbicas, cuartas y quintas exactas.

Raíces cúbicas

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

Raíces cuartas

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

Raíces quintas

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

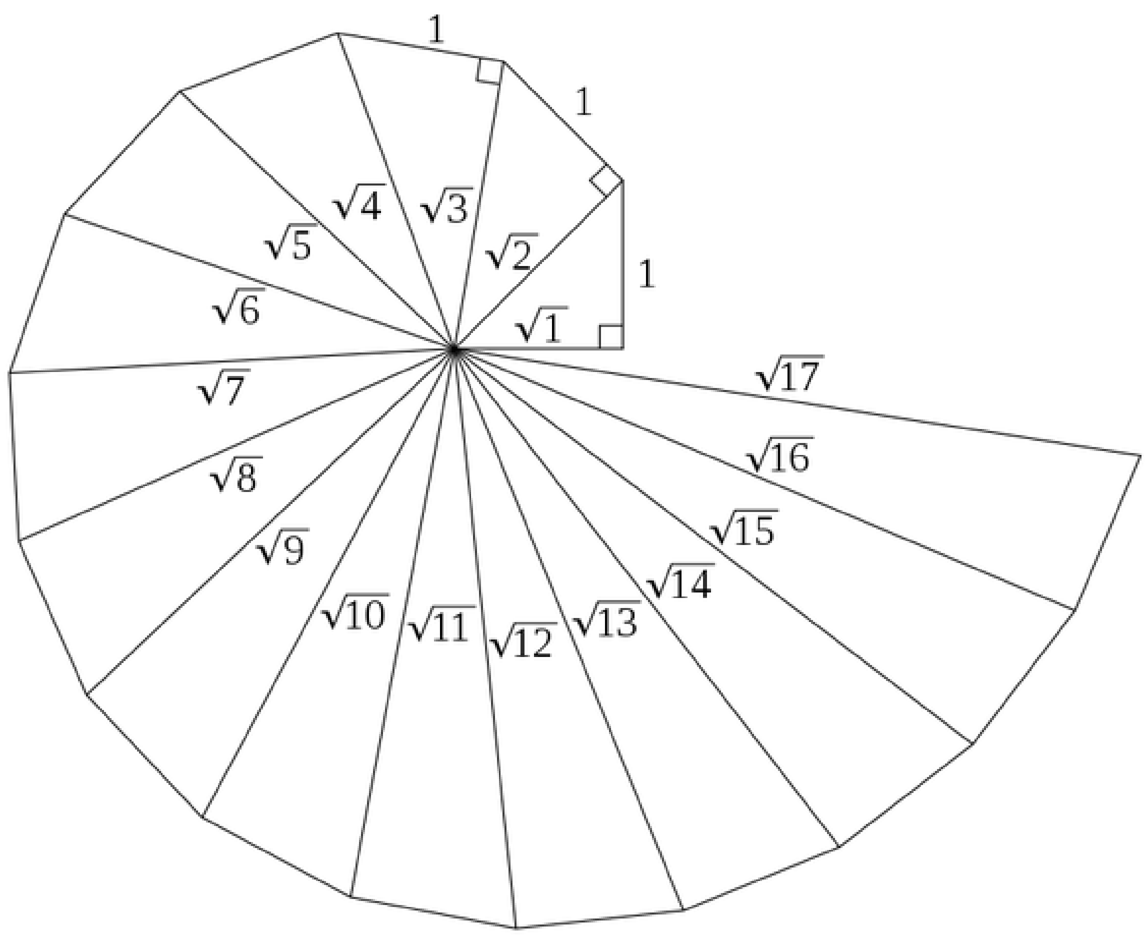
Departamento de Matemática
Profesor Elías Figueroa Quiroz

LA ESPIRAL DE TEODORO

La **espiral de Teodoro**, también llamada **caracola pitagórica**, **espiral pitagórica**, **espiral de Einstein** o **espiral de raíces cuadradas** (será por nombres) es una espiral formada por triángulos rectángulos contiguos, atribuida a **Teodoro de Cirene**.
Teodoro de Cirene (465 a. C. – 398 a. C.) fue un filósofo y matemático griego nacido en Cirene, que probó la irracionalidad de las raíces de los números enteros no cuadrados (2, 3, 5, 6, 7…), al menos hasta 17, excepto la raíz cuadrada de 2 de la que ya se tenían noticias de su irracionalidad en épocas anteriores a Teodoro.

A partir de las **raíces de los números enteros** y del **Teorema de Pitágoras** es como se desarrolla la espiral que lleva su nombre.

La espiral se genera a partir de un triángulo rectángulo isósceles de catetos iguales a 1 formando sucesivos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas resultan números racionales o irracionales.



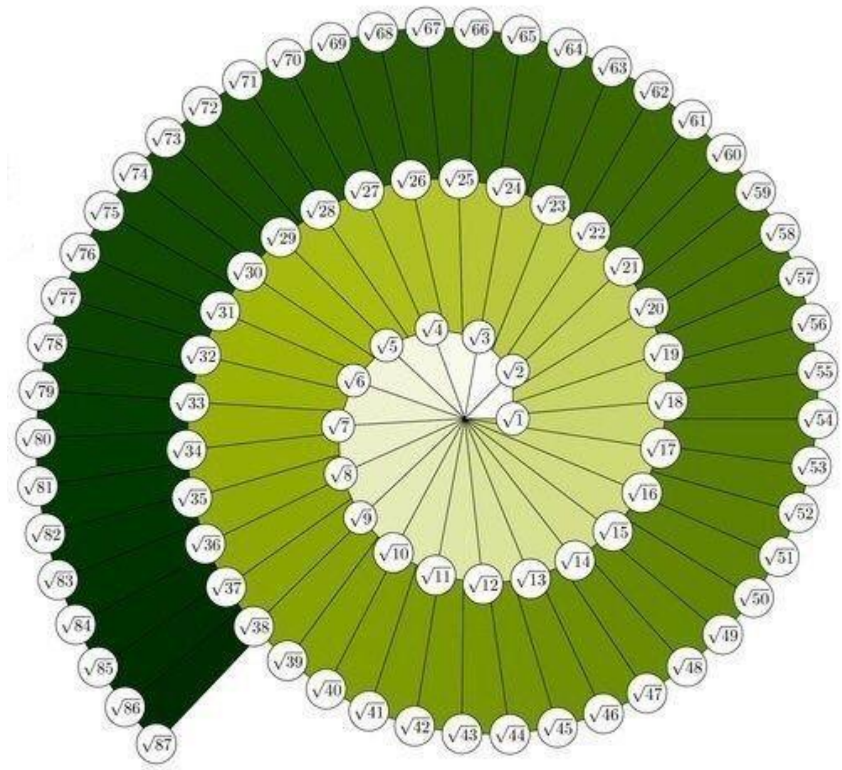
El proceso de construcción de la Espiral de Teodoro es el siguiente:

- El espiral empieza con un triángulo rectángulo isósceles, con ambos catetos de longitud una unidad.
- El siguiente triángulo rectángulo se forma con un cateto de longitud la hipotenusa del primer triángulo, la raíz cuadrada de 2, y el otro cateto de longitud una unidad.
- El tercer triángulo se vuelve a formar utilizando para uno de los catetos la hipotenusa del triángulo anterior, la raíz cuadrada de 3, y el otro cateto de nuevo de longitud unidad.
- Este proceso se repite hasta llegar al último triángulo rectángulo de hipotenusa la raíz cuadrada de 17.

Aunque Teodoro finaliza esta espiral en el triángulo rectángulo de hipotenusa raíz de 17, se puede continuar con esta construcción añadiendo más triángulos rectángulos.

Colegio MARÍA GRISELDA VALLE
El Bosque
Departamento de Matemática
Profesor Elías Figueroa Quiroz

En la siguiente imagen, por ejemplo, se llega hasta una hipotenusa de valor raíz de 87.



ACTIVIDAD N°2

Construir la espiral de Teodoro considerando hasta la raíz cuadrada de 25.

Materiales a utilizar:

- Hoja de block
- Lápiz gráfito o portamina
- Lápices de colores
- Regla, compás y transportador

Para la construcción revisa el siguiente tutorial:

https://www.youtube.com/watch?v=1XZJP-ewSd0

Para su presentación revisa el siguiente link:

http://mateslanj.blogspot.com/2017/10/la-espiral-de-teodoro-trabajos-del.html